

УДК 614.84 : 628.174

В.П.ОЛЬШАНСКИЙ, д-р физ.-матем. наук

Харьковский национальный технический университет сельского хозяйства

С.В.ОЛЬШАНСКИЙ

Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт»

МОДЕЛИРОВАНИЕ КВАЗИВЕРТИКАЛЬНОГО ПАДЕНИЯ ИСПАРЯЮЩЕЙСЯ КАПЛИ ОГНЕТУШАЩЕЙ ЖИДКОСТИ

Рассматривается движение испаряющейся капли при ее квазивертикальном истечении из установки импульсного пожаротушения. Исследуется влияние различных факторов на параметры траектории частицы жидкости.

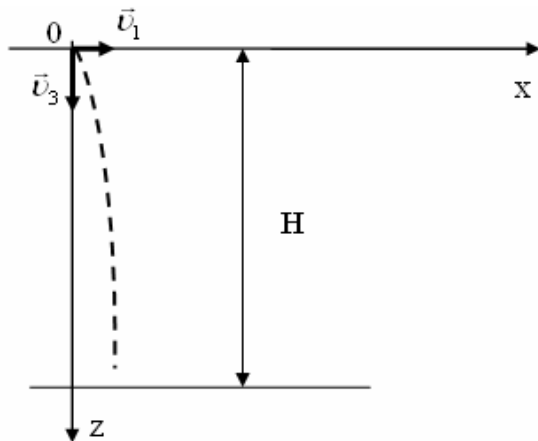
При подаче огнетушащей жидкости в очаг горения распылённой струей значительная часть её рассеивается в ходе полёта капель, т.е. не попадает к цели. Обычно отношение массы жидкости, долетевшей в очаг горения, к общей (истекающей) массе (относительный коэффициент доставки) меньше 30% [1]. Поэтому увеличение относительного коэффициента доставки, а следовательно и эффективности пожаротушения, относится к актуальным задачам.

Исходя из указанной проблемы, вопросы баллистики испаряющихся капель огнетушащей жидкости рассматривались в работах [2, 3, 4]. Строго вертикальное падение капель составило предмет исследований в [2, 5]. Там капля принималась сферическим телом, радиус которого убывает во времени, вследствие испарения, по линейному закону. Сила аэродинамического взаимодействия частицы с газовой средой принималась пропорциональной квадрату скорости обтекания капли газом. Эти гипотезы сохраним и в данной работе, но, в отличие от имеющихся публикаций, будем рассматривать не строго вертикальное падение, а движение под некоторым небольшим углом к вертикальной оси. Ибо даже при вертикальной подаче распылённой струи образуется факел в виде конуса и движение большинства частиц отклоняется от строго вертикального. Моделирование такого движения нужно для расчёта размера области орошения горизонтальной плоскости, на которую направляют сверху распылённую струю.

Процесс падения испаряющейся капли в соответствии с расчётной схемой (рисунок) описываем системой двух нелинейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами

$$\begin{aligned} \ddot{z} + \frac{k\dot{z}}{r_0 - \eta} \left(\dot{z}^2 + \dot{x}^2 \right)^{\frac{1}{2}} &= g; \\ \ddot{x} + \frac{k\dot{x}}{r_0 - \eta} \left(\dot{z}^2 + \dot{x}^2 \right)^{\frac{1}{2}} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $z = z(t)$, $x = x(t)$ – соответственно вертикальное и горизонтальное перемещение капли как функции времени t ; k – приведенный коэффициент аэродинамического сопротивления движению; r_0 – радиус капли в момент её истечения; γ – параметр, характеризующий интенсивность испарения жидкой частицы; g – ускорение свободного падения; точка над символом означает производную по t .



Расчётная схема

Систему (1) дополняем начальными условиями:

$$z(0) = x(0) = 0; \dot{z}(0) = v_3; \dot{x}(0) = v_1, \quad (2)$$

где v_1 , v_3 – проекции скорости истечения капли соответственно в горизонтальном и вертикальном направлениях.

Ограничиваясь вариантом квазивертикального движения капли, примем, что

$$\arctg(v_1 v_3^{-1}) \leq 20^\circ, \quad (3)$$

чем ограничиваем угол раствора факела распылённой струи.

Чтобы найти приближённое аналитическое решение поставленной задачи Коши, которую в общем случае приходится решать численно, несколько упростим уравнения (1). В силу ограничения (3) $\dot{z} \gg \dot{x}$. Поэтому можно принять

$$\left(\dot{z}^2 + \dot{x}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \approx \dot{z} \sqrt{1 + (v_1 v_3^{-1})^2}.$$

Таким образом, задача упрощённого расчёта сводится к решению уравнений:

$$\ddot{z} + \frac{\beta}{r_0 - \gamma} \dot{z}^2 = g ; \ddot{x} + \frac{\beta}{r_0 - \gamma} \dot{x}\dot{z} = 0, \quad (4)$$

в которых $\beta = k\sqrt{1 + (v_1 v_3^{-1})^2}$.

Решим первое из них. Перейдём к новым переменным [5]

$$r = r_0 - \gamma ; \frac{d}{dt} = \frac{d}{dr} \frac{dr}{dt} = -\gamma \frac{d}{dr}.$$

Тогда вертикальная проекция скорости падения капли будет удовлетворять уравнению

$$\frac{d\dot{z}}{dr} - \frac{\beta}{\gamma} \dot{z}^2 = -\frac{g}{\gamma}. \quad (5)$$

Введением вспомогательной функции $w(r)$ по формуле

$$\dot{z} = -\frac{\gamma}{\beta} r w^{-1} \frac{dw}{dr}, \quad (6)$$

его преобразуем к уравнению типа Бесселя

$$r \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{dw}{dr} - g_1 w = 0, \quad (7)$$

где $g_1 = g\beta\gamma^{-2}$.

Общим решением (7) является сумма [6]

$$w = c_1 I_0(\tau) + c_2 K_0(\tau), \quad (8)$$

в которой c_1, c_2 – произвольные постоянные; $I_0(\tau)$ и $K_0(\tau)$ – модифицированная функция Бесселя и функция Макдональда нулевых индексов; $\tau = 2\sqrt{g_1(r_0 - \gamma)}$.

Подставив выражение (8) в (6), находим общее решение уравнения (5). Им является

$$\dot{z}(t) = \frac{\tau}{2\beta_0} \frac{cK_1(\tau) - I_1(\tau)}{cK_0(\tau) + I_0(\tau)}. \quad (9)$$

Здесь $\beta_0 = \beta\gamma^{-1}$; $c = c_2 c_1^{-1}$ – произвольная постоянная; $I_1(\tau)$ и $K_1(\tau)$ – модифицированная функция Бесселя и функция Макдональда

индексов единица.

В силу начальных условий (2) произвольная постоянная принимает значение

$$c = \frac{\tau_0 I_1(\tau_0) + 2\beta_0 \nu_3 I_0(\tau_0)}{\tau_0 K_1(\tau_0) - 2\beta_0 \nu_3 K_0(\tau_0)}, \quad (10)$$

причём $\tau_0 = 2\sqrt{g_1 r_0}$.

Таким образом, вертикальная проекция скорости падения капли выражается в замкнутом виде с помощью известных цилиндрических функций [6, 7].

Для определения горизонтальной проекции скорости падения $\dot{x}(t)$ обратимся ко второму уравнению системы (4). Учитывая (6), представим его в виде

$$\int \frac{d\dot{x}}{\dot{x}} = - \int \frac{dw}{w}.$$

Откуда следует, что

$$\dot{x} = c_3 w^{-1}(t),$$

где c_3 – произвольная постоянная, которую находим из начального условия (2).

Учитывая (8), получаем

$$\dot{x}(t) = v_1 \frac{I_0(\tau_0) + cK_0(\tau_0)}{I_0(\tau) + cK_0(\tau)}. \quad (11)$$

Множитель c определяем выражением (10).

Итак, вычисление проекций скорости падения капли $\dot{z}(t)$ и $\dot{x}(t)$ можно проводить с помощью таблиц функций Бесселя, которые имеются в [6, 7] и других изданиях по специальным функциям.

Для определения перемещений капли приходится вычислять интегралы

$$z(t) = \int_0^t \dot{z}(t) dt \quad \text{и} \quad x(t) = \int_0^t \dot{x}(t) dt,$$

которые не выражаются с помощью табулированных функций.

Чтобы построить приближённые формулы для расчёта перемещений, введём асимптотику

$$\dot{z}(t) \xrightarrow{g \rightarrow 0} \dot{z}_a(t) = \frac{v_3}{1 - \beta_0 v_3 \ln \left(1 - \frac{\gamma \cdot t}{r_0} \right)}; \quad (12)$$

$$\dot{x}(t) \xrightarrow{g \rightarrow 0} \dot{x}_a(t) = \frac{v_1}{v_3} \dot{z}_a(t).$$

К ней легко прийти, используя формулы асимптотического поведения функций Бесселя при малых значениях аргумента [6, 7].

Интегралы от $\dot{z}_a(t)$ и $\dot{x}_a(t)$ выражаются в замкнутом виде через табулированную интегральную показательную функцию $Ei(-\eta)$ [4, 6, 7]. Поэтому

$$z_a(t) = \int_0^t \dot{z}_a(t) dt = \frac{r_0}{\beta} \exp(\eta_1) [Ei(-\eta_2) - Ei(-\eta_1)]; \quad (13)$$

$$x_a(t) = \frac{v_1}{v_3} z_a(t); \quad \eta_1 = (\beta_0 v_3)^{-1}; \quad \eta_2 = \eta_1 - \ln \left(1 - \frac{\gamma \cdot t}{r_0} \right).$$

Невязки

$$\Phi_3 = \int_0^t [\dot{z}(t) - \dot{z}_a(t)] dt \quad \text{и} \quad \Phi_1 = \int_0^t [\dot{x}_a(t) - \dot{x}(t)] dt$$

положительны и удовлетворяют неравенствам

$$\Phi_3 < t[\dot{z}(t) - \dot{z}_a(t)]; \quad \Phi_1 < t[\dot{x}_a(t) - \dot{x}(t)].$$

Для приближённого вычисления их можно принять

$$\Phi_3(t) \approx \frac{1}{2} t[\dot{z}(t) - \dot{z}_a(t)]; \quad \Phi_1(t) \approx \frac{1}{2} t[\dot{x}_a(t) - \dot{x}(t)].$$

В результате приближённый расчёт перемещений капли сводится к формулам

$$z(t) \approx z_a(t) + \Phi_3(t); \quad x(t) \approx \frac{v_1}{v_3} z_a(t) - \Phi_1(t) \quad (14)$$

и его несложно проводить, опираясь на (9), (11)-(13) и таблицы специальных функций [6, 7].

С целью апробации приближённых аналитических решений проведены расчёты при $r_0 = 10^{-4}$ м; $k = 10^{-5}$; $\gamma = 10^{-4}$ м/с; $v_3 = 100$ м/с; $v_1 = 20$ м/с.

В табл.1 указаны, вычисленные двумя способами, значения проекций скорости падения капли. В числителе записаны значения $\dot{z}(t)$ и $\dot{x}(t)$, полученные путём численного интегрирования системы (1) на персональном компьютере. В знаменатели помещены значения проекций скорости, к которым приводят аналитические решения (9) и (11). На длительном промежутке времени полёта капли наблюдается хорошее соответствие результатов, полученных разными методами, что подтверждает возможность перехода от (1) к более простой системе (4).

Таблица 1 – Значения $\dot{z}(t)$ и $\dot{x}(t)$ в м/с, вычисленные двумя методами

$t, \text{с}$	$\dot{z}(t)$	$\dot{x}(t)$	$t, \text{с}$	$\dot{z}(t)$	$\dot{x}(t)$
0,05	<u>66,00</u>	<u>13,12</u>	0,25	<u>26,45</u>	<u>4,99</u>
	66,00	13,12		26,44	4,99
0,10	<u>48,76</u>	<u>9,61</u>	0,30	<u>22,73</u>	<u>4,21</u>
	48,76	9,61		22,71	4,20
0,15	<u>38,37</u>	<u>7,47</u>	0,35	<u>19,83</u>	<u>3,59</u>
	38,36	7,47		19,80	3,58
0,20	<u>31,42</u>	<u>6,03</u>	0,40	<u>17,50</u>	<u>3,08</u>
	31,41	6,03		17,47	3,07

В табл.2 записаны полученные двумя способами значения $z(t)$ и $x(t)$. Числители – это результат численного интегрирования неупрощённой системы (1), а знаменатели – это перемещения, к которым приводят формулы (9), (11)-(14). Сравнение чисел подтверждает приемлемость предложенных упрощений и достаточно высокую точность приближённого аналитического решения.

Таблица 2 – Значения $z(t)$ и $x(t)$ в м, вычисленные двумя методами

$t, \text{с}$	$z(t)$	$x(t)$	$t, \text{с}$	$z(t)$	$x(t)$
0,05	<u>4,04</u>	<u>0,81</u>	0,25	<u>12,20</u>	<u>2,40</u>
	4,04	0,81		12,17	2,40
0,10	<u>6,87</u>	<u>1,37</u>	0,30	<u>13,43</u>	<u>2,63</u>
	6,86	1,37		13,39	2,63
0,15	<u>9,03</u>	<u>1,79</u>	0,35	<u>14,49</u>	<u>2,82</u>
	9,02	1,79		14,44	2,82
0,20	<u>10,76</u>	<u>2,12</u>	0,40	<u>15,42</u>	<u>2,99</u>
	10,74	2,12		15,35	2,99

О влиянии угла раствора факела распылённой струи на величину радиуса круга орошения горизонтальной плоскости позволяют делать вывод числа в табл.3. Они получены для предыдущих значений r_0 , γ , k и v_3 . Менялось только отношение $v_1 v_3^{-1}$ и предполагалось, что расстояние H от точки вылета капли до горизонтальной плоскости постоянно и равно 4 м. Величина радиуса круга орошения r принималась равной x в тот момент, когда $z(t) = H$.

Таблица 3 – Значения радиуса круга орошения в метрах

$v_1 v_3^{-1}$	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35
r	0,61	0,81	1,00	1,20	1,40

Расчёты показывают, что зависимость радиуса круга орошения от тангенса угла раствора факела распылённой струи близка к линейной.

Таким образом, наше исследование свидетельствует, что решение упрощённых уравнений при квазивертикальном падении капли может быть выражено с помощью функций Бесселя в аналитической форме. Полученные формулы годятся для расчёта параметров траектории квазивертикального падения испаряющейся капли и он может выполняться с помощью таблиц специальных функций.

1. Дауэнгауэр С.А. Пожаротушение тонкораспылённой водой: механизмы, особенности, перспективы // Пожаровзрывобезопасность. – 2004. – №6. – С.78-81.

2. Севриков В.В., Карпенко В.А., Севриков И.В. Автоматические быстродействующие системы пожарной защиты. – Севастополь: Сев ГТУ, 1996. – 260 с.

3. Абрамов Ю.А., Росоха В.Е., Шаповалова Е.А. Моделирование процессов в пожарных стволах. – Харьков: Фолио, 2001. – 195 с.

4. Ольшанский В.П., Ольшанский С.В. К расчёту предельной дальности подачи испаряющихся тонкораспылённых огнетушащих веществ установками импульсного пожаротушения // Пожаровзрывобезопасность. – 2005. – №4. – С.67-70.

5. Ольшанский В.П., Ольшанский С.В. О нелинейной модели падения испаряющейся капли // Коммунальное хозяйство городов: Науч.-техн. сб. Вып.67. – К.: Техніка, 2006. – С.351-357.

6. Абрамовиц А., Стиган И., Справочник по специальным функциям (с формулами, графиками и математическими таблицами). – М.: Наука, 1979. – 832 с.

7. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции. – М.: Наука, 1977. – 344 с.

Получено 23.06.2006